Translation of Hara's Triangle and Triple : Haragopal R_**From Azim premji University At Right Angles_ March, 2020**

हारा के त्रिभुज और त्रिक

हरगोपाल आर

मुख्य शब्द : संख्याएँ, ज्यामिति, त्रिभुज असमिका, वर्गों का योग, घातों का योग

भले ही संख्याओं की दुनिया और ज्यामिति की दुनिया अलग-अलग दिखाई देती है, लेकिन इनके बीच कई आश्चर्यजनक सम्बन्ध हैं। यूक्लिड की पुस्तक *एलीमेंट्स* में ऐसे बहुत-से आकर्षक सम्बन्धों का उल्लेख मिलता है जो इन दो दुनियाओं को जोड़ते हैं।

एक प्रसिद्ध सम्बन्ध इस प्रकार है : यदि *a, b, c* तीन धनात्मक संख्याएँ हैं, तो *a, b, c* माप की भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना तभी की जा सकती है, जब इनमें से कोई दो संख्याओं का योग, तीसरी संख्या से अधिक हो, यानी, $a + b > c$, या $b + c > a$ या $c + a > b$

एक और प्रसिद्ध सम्बन्ध : जब दो संख्याओं के वर्गों का योग किसी तीसरी संख्या के वर्ग के बराबर होता है, तो इनसे बनने वाला त्रिभुज समकोण होता है। अर्थात, यदि *a, b, c* भुजाओं वाले एक त्रिभुज के लिए $a^2 + b^2 = c^2$ हो तो भुजा *c* का सम्मुख कोण एक समकोण होता है।

मैंने इस सम्बन्ध को ध्यान में रखते हुए, एक समीकरण $a^n + b^n = c^n$ का, धनात्मक पूर्णांकों में हल खोजने की समस्याओं के बारे में सोचा, जहाँ n एक ऋणात्मक पूर्णांक है। उदाहरण के लिए :

- यदि $n = -1$ है, तो यह सवाल बनता है : कि किन धनात्मक पूर्णांकों *a, b, c* के लिए निम्न समीकरण सही होगा कि $1/a + 1/b = 1/c$?
- यदि $n = -2$ है, तो यह सवाल बनता है : कि किन धनात्मक पूर्णांकों *a, b, c* के लिए निम्न समीकरण सही होगा कि $1/a^2 + 1/b^2 = 1/c^2$?

और इसी तरह n के अन्य ऋणात्मक मानों के लिए भी सवाल सोचे जा सकते हैं।

आइए, हम उपरोक्त दो स्थितियों पर अधिक गहराई से विचार करते हैं।

पहली स्थिति $n = -1$: समीकरण $a^n + b^n = c^n$ में n का मान रखने पर, समीकरण $1/a + 1/b = 1/c$ मिलता है।

स्पष्टीकरण के बिना, मैं सिर्फ़ उपरोक्त समीकरण का हल दे रहा हूँ क्योंकि मेरी रुचि दूसरी स्थिति $n = -2$ के बारे में बात करने में ज़्यादा है। दूसरी स्थिति में प्राप्त समीकरण का हल ज्यामिति के लिहाज़ से अप्रत्याशित और आश्चर्यजनक है।

यहाँ $n = -1$ के लिए कुछ हल दिए गए हैं :

$(a, b, c) = (2,2,1), (3,6,2), (4,12,3), (5,20,4), (6,30,5), (7,42,6), (8,56,7), \ldots$

दूसरी स्थिति $n = -2$: समीकरण $a^n + b^n = c^n$ में n का मान रखने पर, प्राप्त समीकरण को ${}^1/_{a^2} + {}^1/_{b^2} = {}^1/_{c^2}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

इसका हल खोजने से पहले, मुझे ज्यामिति के साथ इसके सम्बन्ध का परिचय देना होगा।

हम जानते हैं कि किसी भी त्रिभुज में, यदि दो भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर हो, तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।

केवल भुजाओं के बीच सम्बन्धों पर विचार करने के बजाय, क्या होगा अगर हम त्रिभुज के अन्य तत्वों, जैसे कि इसका शीर्षलम्ब (altitude), इसकी माध्यिका (median) इत्यादि के बीच सम्बन्धों पर भी विचार करें?

एक त्रिभुज की कल्पना करें जिसके *दो शीर्षलम्बों के वर्गों का योग उसके तीसरे शीर्षलम्ब के वर्ग के बराबर हो।* भुजाओं *a, b, c* वाले एक त्रिभुज में, माना कि उसके शीर्षलम्ब को h_a, h_b, h_c से दर्शाया गया है (जिसमें h_a भुजा *a* के सम्मुख शीर्ष से a पर लम्ब है और इसी प्रकार h_b व h_c भी)। अब हम जानना चाहते हैं : *किन धनात्मक पूर्णांकों a, b, c के लिए समीकरण*

$h_a{}^2 + h_b{}^2 = h_c{}^2$ *सही होगा?*

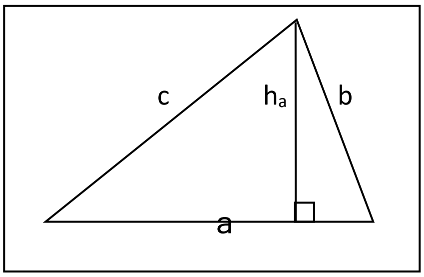
इस सवाल के अर्थ को समझने के लिए, एक त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल Δ पर विचार करें, जहाँ त्रिभुज के शीर्षलम्ब और भुजा की लम्बाई पता होने पर त्रिभुज के क्षेत्रफल को तीन तरीक़े से लिख सकते हैं :

$$\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

इस सम्बन्ध से, हम पाते हैं कि

$h_a = \frac{2\Delta}{a}$, $h_b = \frac{2\Delta}{b}$, $h_c = \frac{2\Delta}{c}$

यह इस प्रकार है कि



यदि

$$h_a{}^2 + h_b{}^2 = h_c{}^2$$

तब

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$ होगा।

दूसरी स्थिति का समीकरण है।

इसका अर्थ है कि यदि हम एक ऐसा त्रिभुज बनाने में सक्षम हैं जिसकी भुजाएँ *a, b, c* इस प्रकार हैं कि $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$, तो उस त्रिभुज में भुजाओं *a, b* पर बने शीर्षलम्बों के वर्गों का योग, *c* भुजा पर बने शीर्षलम्ब के वर्ग के बराबर होगा। और इसका विपरीत भी सत्य होगा।

यदि ऐसा कोई त्रिभुज मौजूद है, तो मैं इसे 'हारा का त्रिभुज' कहूँगा और मैं ऐसे त्रिक (*a, b, c*) को 'हारा का त्रिक' कहूँगा।

अब हम समीकरण

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$ ….. (1)

के लिए धनात्मक पूर्णांक हलों की तलाश करते हैं।

यह हमें एक पाइथागोरस त्रिक (*x, y, z*) की याद दिलाता है, यानी कि, वह त्रिक जो सम्बन्ध $x^2 + y^2 = z^2$ को सन्तुष्ट करता हो।

एक सामान्य सम्बन्ध जो इस तरह के त्रिक देता है, वह है

$x = 2m, y = m^2 - 1, z = m^2 + 1.$ ……(2)

तो एक त्रिक (*a, b, c*) समीकरण (1) को सन्तुष्ट करेगा यदि हम यह सुनिश्चित कर सकें कि

$a : b : c = \frac{1}{2m} : \frac{1}{m^2-1} : \frac{1}{m^2+1}$ ………….(3)

यह सुनिश्चित करने का एक सरल तरीक़ा है कि हम इसे $(2m) \cdot (m^2 - 1) \cdot (m^2 + 1)$ से गुणा करें और *a, b, c* के निम्नलिखित मान लें :

$a = (m^2 - 1) \cdot (m^2 + 1), b = 2m(m^2 + 1), c = 2m(m^2 - 1)$ ……..(4)

हम देखते हैं कि किसी भी पूर्णांक $m > 1$, के लिए इस प्रकार परिभाषित पूर्णांक *a, b, c;* जहाँ $a = (m^2 - 1) \cdot (m^2 + 1),\ b = 2m(m^2 + 1),\ c = 2m(m^2 - 1)$ हो, निम्न समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$$

इसका अर्थ है कि किसी भी $m > 1$ के लिए त्रिभुज, जिसकी भुजाएँ $2m(m^2 + 1)$, $(m^2 - 1)(m^2 + 1)$ और $2m(m^2 - 1)$ हैं, यह गुणधर्म होगा कि उसके दो शीर्षलम्बों के वर्गों का योग, तीसरे शीर्षलम्ब के वर्ग के बराबर होगा।

उपरोक्त सूत्र से प्राप्त कुछ हारा त्रिक की सूची इस प्रकार है :

m	$a = (m^2 - 1) \cdot (m^2 + 1)$	$b = 2m(m^2 + 1)$	$c = 2m(m^2 - 1)$
2	15	20	12
3	80	60	48
4	255	136	120
5	624	260	240
6	1295	444	420
7	2400	700	672
8	4095	1040	1008
9	6560	1476	1440
10	9999	2020	1980

यदि हम *a, b, c* के महत्तम समापवर्तक (Gretest t Common Devisor) को *a, b, c* से विभाजित करते हैं, (इससे प्राप्त त्रिभुज मूल त्रिभुज के समरूप होगा, और इसमें भी मूल त्रिभुज के समान ज्यामितीय गुणधर्म होंगे) तो हम निम्नलिखित त्रिक *a′, b′, c′* और प्राप्त करते हैं।

m	*a′*	*b′*	*c′*
2	15	20	12
3	20	15	12
4	255	136	120
5	156	65	60
6	1295	444	420
7	600	175	168
8	4095	1040	1008
9	1640	369	360
10	9999	2020	1980

समापन/अन्तिम टिप्पणी :

उपरोक्त पड़ताल हमारे मन में इससे सम्बन्धित कई अन्य सवाल उठाती है। उदाहरण के लिए, शीर्षलम्ब के बजाय, हम देख सकते हैं कि क्या होगा यदि हम यही शर्तें माध्यिकाओं या कोण समद्विभाजक पर लागू करते हैं, इत्यादि।

हरगोपाल आर आन्ध्र प्रदेश के कुरनूल के एक नगरपालिका स्कूल में उत्साही गणित शिक्षक हैं। उन्हें संख्याओं के गुणधर्मों की पड़ताल बेहद पसन्द है और वे दृढ़ता से मानते हैं कि यदि हम बच्चों में पड़ताल करने की क्षमता विकसित करने में सक्षम हैं, तो विद्यार्थी चमत्कार कर सकते हैं। वे `राइज़िंग अ मैथेमेटिशियन फाउण्डेशन' (गणित के प्रचार के लिए एक लाभ-निरपेक्ष संगठन) के संकाय सदस्य भी हैं और शिक्षक-प्रशिक्षण कार्यक्रम करते हैं। उनसे rharagopal@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल
पुनरीक्षण : अशोक प्रसाद
कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही